Equação do Plano

- Equação vetorial de um Plano
- Equações Paramétricas do Plano
- Equações Geral de um Plano
    - Casos Particulares da Equações Geral de um Plano
- Vetor normal a um plano

Feixe de Planos

- Definição

Posições Relativas Entre Reta e Plano

- Contida no plano
- Paralela ao plano
- Concorrentes e não perpendiculares
- Perpendicular ao plano

Posições Relativas Entre Dois Planos

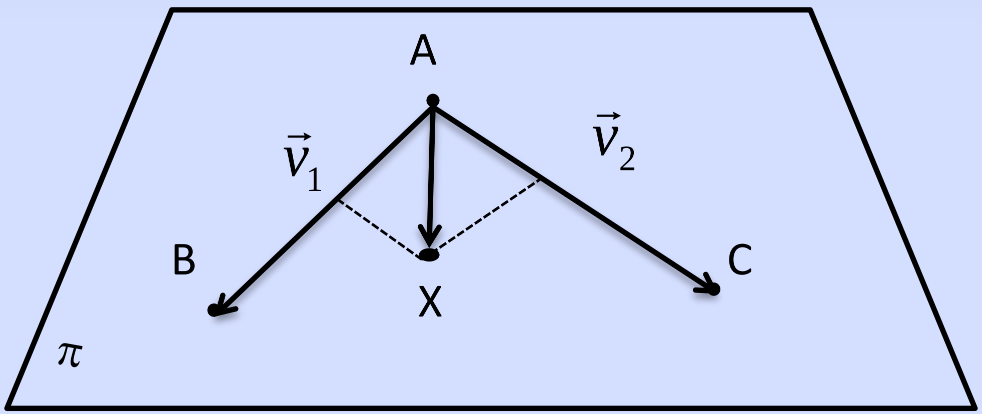
- Coincidentes
- Paralelos distintos
- Secantes e não são perpendiculares

Distâncias

- Entre dois pontos
- Entre ponto e reta
- Entre ponto e plano
- Entre reta e plano
- Entre dois planos
- Entre duas retas

Equação do Plano

- Dados três pontos distintos não colineares A, B, C, existe e é único o plano que os contém.
- Um plano fica determinado por esses três pontos.
- É equivalente a um ponto e dois vetores linearmente independentes (não nulos e não paralelos.
- Em coordenadas cartesianas A=(x_0,y_0,z_0) e um conjunto {v_1,v_2} linearmente independente, onde : $\vec{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ e $\vec{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$



•Equação vetorial de um Plano:

Estabelecendo-se um ponto X qualquer , no espaço, que pertença ao plano π. Os vetores (X-A), $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são coplanares e o conjunto {(X-A),$\vec{v}_1$,$\vec{v}_2$} é linearmente dependente, ou seja um dos vetores é combinação linear dos outros dois.

$$\left.\begin{array}{l}(X-A)=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2 \\ X=A+\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2\end{array}\right\} \quad \lambda_1,\lambda_2 \in R$$

À medida que λ_1 e λ_2 assumem diferentes valores, o ponto X, da extremidade do vetor X-A, percorre todo o plano.

Exemplo:

A equação vetorial do plano que contém o ponto A=(1,2,1) e os vetores $\mathbf{v}_1$=(1,-4,5) e $\mathbf{v}_2$=(2,1,3) é:

π: X = (1,2,1) + λ_1(1,-4,5) + λ_2(2,1,3); $\lambda_1,\lambda_2\ \varepsilon\ \mathbf{R}$

•Equações Paramétrica do Plano:

Estas equações são obtidas a partir da equação vetorial $X = A + \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2$; $\lambda_1,\lambda_2 \in R$, escrevendo-se o vetores em coordenadas cartesianas:

$$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + \lambda_1(l_1,m_1,n_1) + \lambda_2(l_2,m_2,n_2); \qquad \lambda_1,\lambda_2 \in R$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 \\ y = y_0 + \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 \\ z = z_0 + \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 \end{cases} \quad \lambda_1,\lambda_2 \in R$$

•Equações Geral de um Plano:

Outra forma de expressar a dependência linear do conjunto de vetores $\{(X-A), \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ é através do determinante formado pelas coordenadas dos mesmos que é nulo.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante obtém-se a equação $ax+by+cz+d=0$ onde os coeficientes a, b, c, não simultaneamente nulos, uma vez que o conjunto de vetores $\{v_1,v_2\}$, por hipótese é linearmente independente.

Exemplo:

Se o plano contém os pontos A=(3,-6,7) e é paralelo aos vetores $\mathbf{v}_1$=(1,-3,5) e $\mathbf{v}_2$=(2,-1,3), então a equação geral é obtida impondo que o determinante das coordenadas dos vetores (X-A), $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ seja nulo, ou seja:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+6 & z-7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

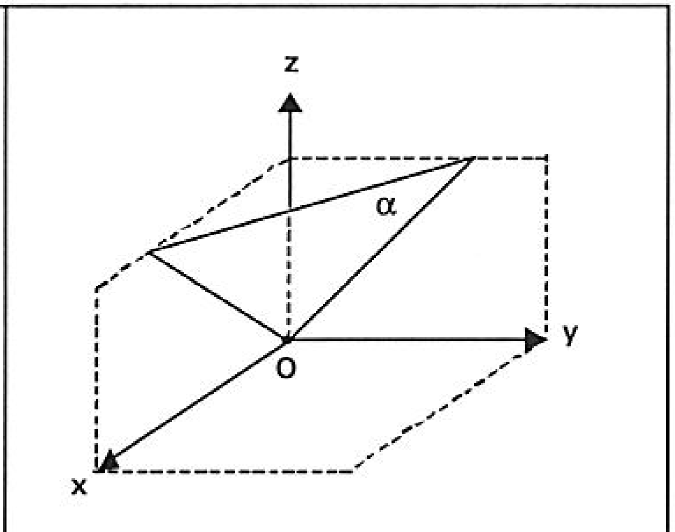
A equação geral do plano é: 4x-7y-5z-19=0

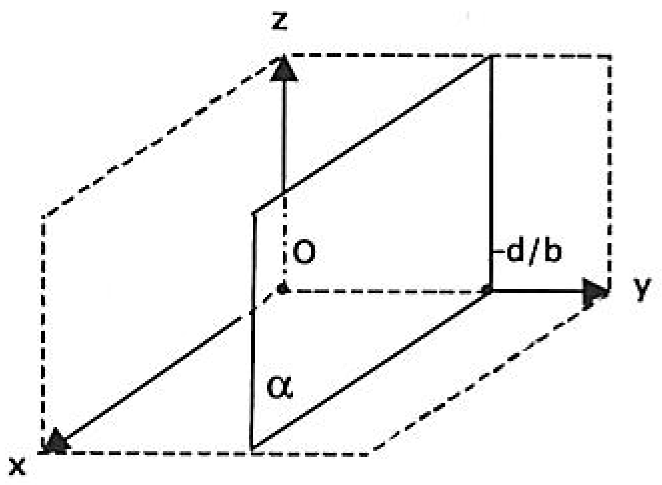
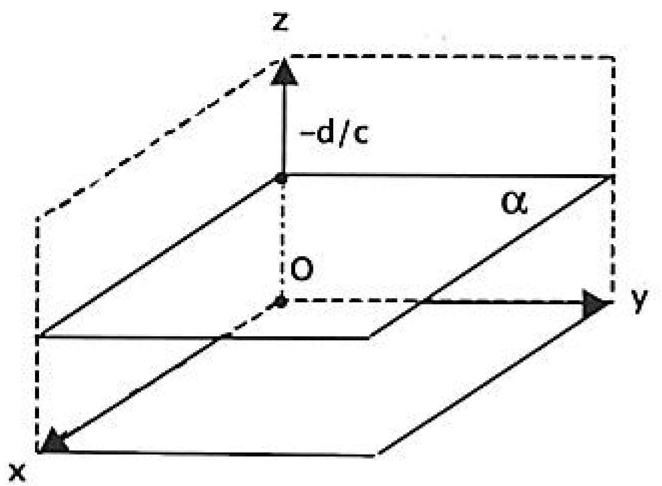
- **Casos Particulares da Equações Geral de um Plano:**

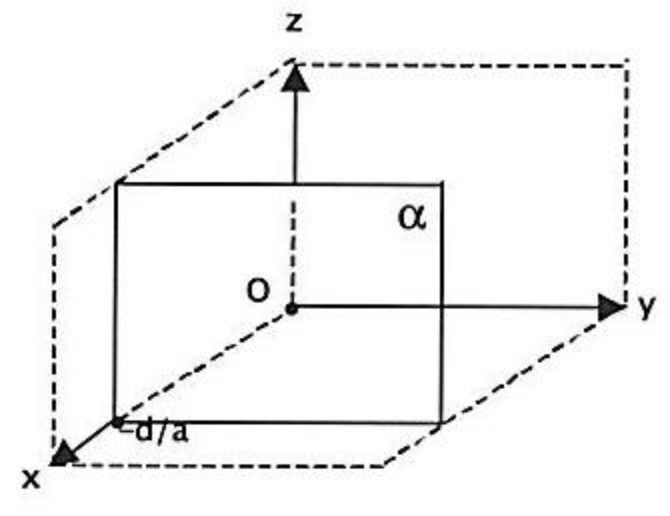
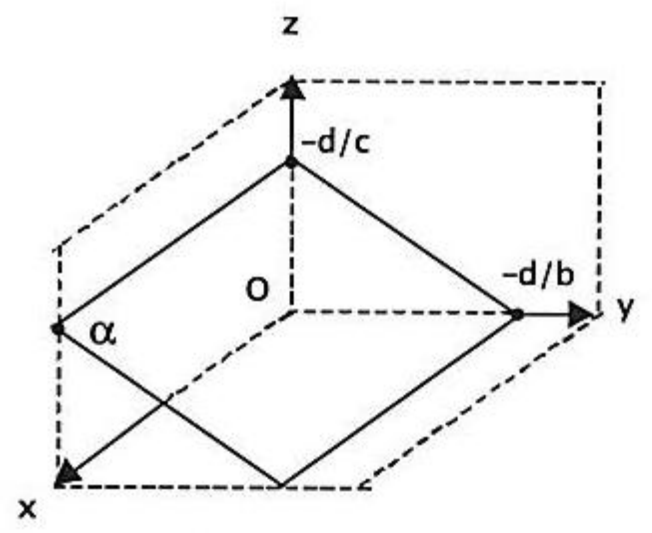
1º CASO:

$$d = 0 \Rightarrow \alpha : ax + by + cz = 0 .$$

A origem O = (0,0,0) verifica a equação do plano. Logo, a origem do sistema de coordenadas cartesianas pertence ao plano, conforme ilustra a figura ao lado.



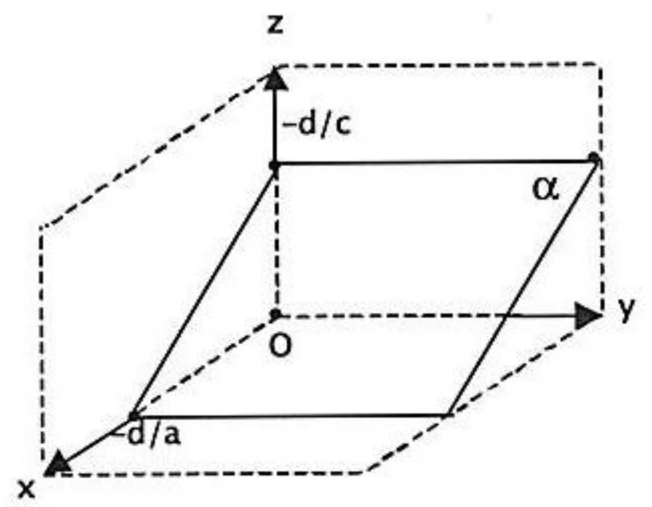
2º CASO: $a = 0 \; ; \; c = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{d}{b}$ O plano α é paralelo ao plano coordenado xOz , conforme ilustra a figura ao lado.	
3º CASO: $a = 0 \; ; \; b = 0 \Rightarrow z = -\dfrac{d}{c}$ O plano α é paralelo ao plano coordenado xOy , conforme ilustra a figura ao lado.	

4º CASO: $b = 0\ ;\ c = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{d}{a}$ O plano α é paralelo ao plano coordenado yOz, conforme ilustra a figura ao lado.	
5º CASO: $a = 0 \Rightarrow by + cz + d = 0$ Na equação do plano α não comparece a variável x, ele é paralelo ao eixo das abscissas, conforme ilustra a figura ao lado.	

6º CASO:

$$b = 0 \Rightarrow ax + cz + d = 0$$

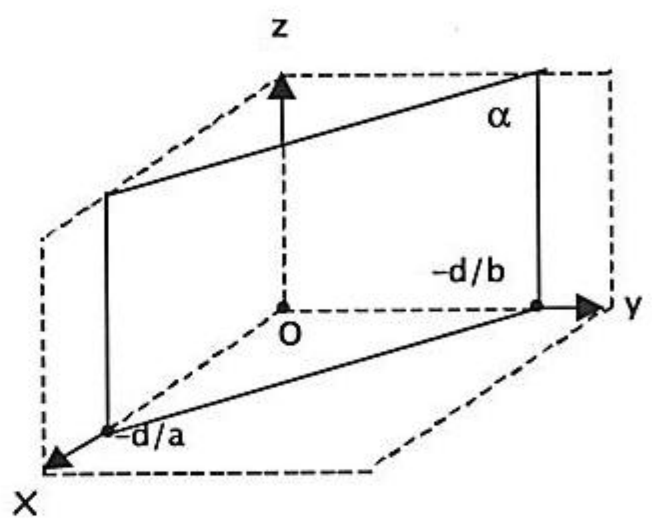
Na equação do plano α não comparece a variável y, ele é paralelo ao eixo das ordenadas, conforme ilustra a figura ao lado.

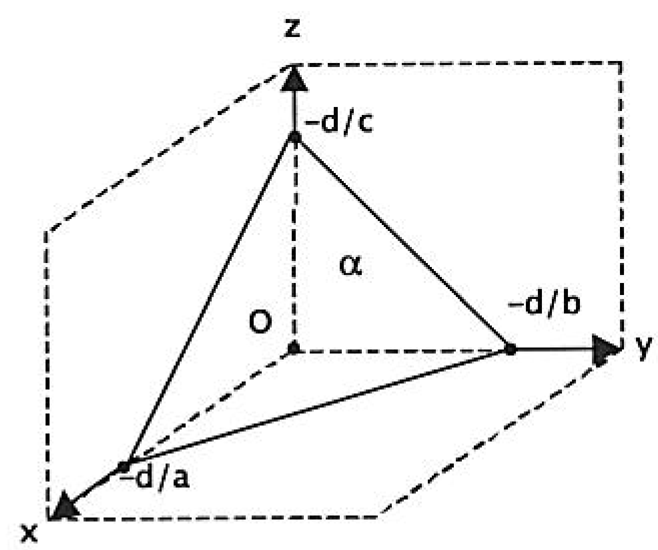


7º CASO

$$c = 0 \Rightarrow ax + by + d = 0$$

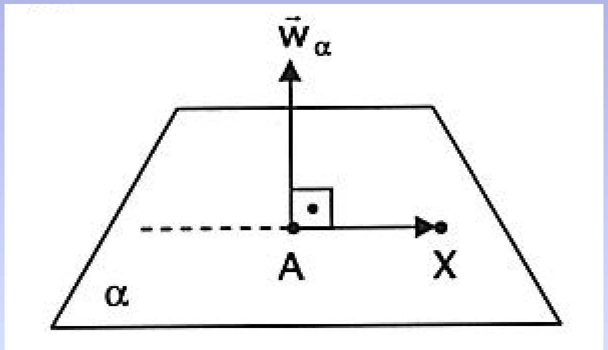
Na equação do plano α não comparece a variável z, ele é paralelo ao eixo das cotas, conforme ilustra a figura ao lado.



8º CASO $abcd \neq 0$ Neste caso α é um plano qualquer, interceptando os três eixos coordenados, sem nenhuma particularidade, conforme ilustra a figura ao lado.	

•Vetor normal a um plano:

Dado um plano α e sua equação geral ax+by+cz+d=0, onde a, b, c e d são números reais não simultaneamete nulos, um vetor normal ao plano α é ortogonal a todos os vetores paralelos a este plano.



Como $A=(x_0,y_0,z_0)$ e $X=(x,y,z)$ pertencem a α, então:

$(X-A)=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ e $ax_0+by_0+cz_0+d=0$

Provando que $\mathbf{w}_\alpha=(a,b,c)$ é normal a α.

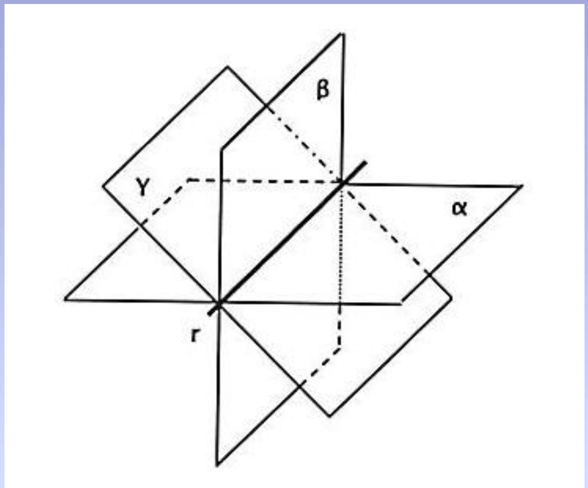
Subtraindo-se a s equações ax+by+cz+d=0 e $ax_0+by_0+cz_0+d=0$ obtém-se:
$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ Isto corresponde ao produto escalar $\mathbf{W}_\alpha.(X-A)=0$
Exemplo: Um vetor normal ao plano a: 2x+y-3z+1=0 é $\mathbf{W}_\alpha=(2,1,-3)$

Observação:

Dado o plano α pela sua equação vetorial $X=A+\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2$; λ_1,λ_2 ε R, o vetor $\mathbf{v}_1 x \mathbf{v}_2$ também é normal ao plano α e paralelo a $\mathbf{W}_\alpha$.

Feixe de Planos

Definição: Um feixe de planos de um eixo r é o conjunto de todos os planos que contêm a reta r.



Dadas as equações gerais dos planos:

α: $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$

β: $a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$

Constrói-se a equação:

$m(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+n(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)$ onde m,n ε R

$(ma_1+na_2)x+(mb_1+nb_2)y+(mc_1+nc_2)z+(md_1+nd_2)=0$

Representa a família de planos (feixe) de eixo r

Determinando-se valores para m e n não simultaneamente nulos, obtém-se um plano de contém a reta r.

O vetor normal de qualquer plano do feixe é:

$\mathbf{W}=(ma_1+na_2,mb_1+nb_2,mc_1+nc_2)=m(a_1,b_1,c_1)+n(a_2,b_2,c_2)$

O Vetor da reta r é: $\mathbf{u}= (a_1,b_1,c_1) \times (a_2,b_2,c_2)$

$\mathbf{W}=(ma_1+na_2,mb_1+nb_2,mc_1+nc_2)=m(a_1,b_1,c_1)+n(a_2,b_2,c_2)$
$\mathbf{u}=(a_1,b_1,c_1) \times (a_2,b_2,c_2)$

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{W}=[(a_1,b_1,c_1) \times (a_2,b_2,c_2)] \,.\, [m(a_1,b_1,c_1)+n(a_2,b_2,c_2)] =$
$[(a_1,b_1,c_1) \times (a_2,b_2,c_2)] \,.\, m(a_1,b_1,c_1)+[(a_1,b_1,c_1) \times (a_2,b_2,c_2)] \,.\, n(a_2,b_2,c_2)=0$

Portanto conclui-se que **u** é ortogonal a **W**. No caso particular em que m=0 ou n=0, obtém-se as equações dos planos α e β respectivamente.

Supondo m≠0 (excluindo o plano β do feixe) obtém-se:

$$(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\frac{n}{m}(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

Chamando : $h=\frac{n}{m}$

A equação do feixe dos planos pode ser escrita:

$$(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+h(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

Quando h assume valores reais diversos a equação fornece todos os planos do feixe exceto β.

Posições Relativas Entre Reta e Plano

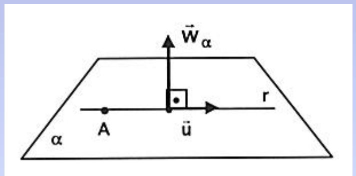
Dados:

Reta r: $X=A+\lambda\mathbf{u}$; λ e R e

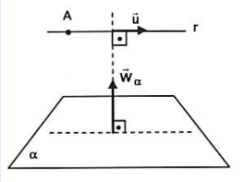
Plano α: $ax+by+cz+d=0$

Podem ocorrer as seguintes posições relativas

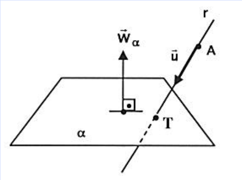
I. A reta está contida no plano



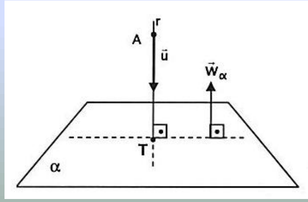
II. A reta é paralela ao plano



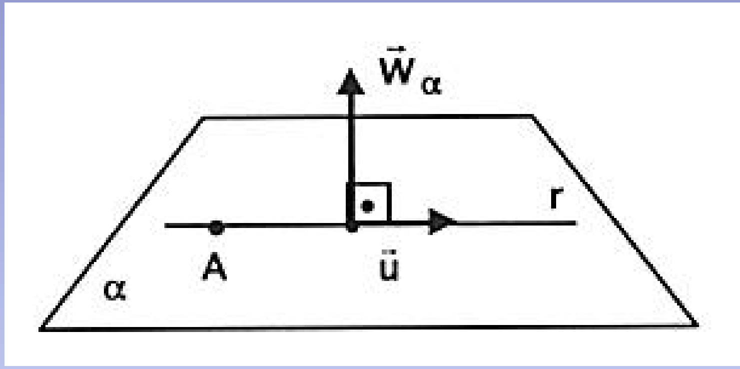
III. Reta e plano concorrentes e não perpendiculares



IV. Reta é perpendicular ao Plano



I. A reta está contida no plano



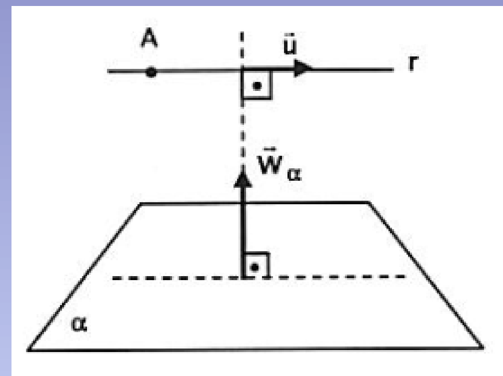
rTαY$\mathbf{u}.\mathbf{W}_\alpha$=0 e A Є α, onde $\mathbf{W}_\alpha$=(a,b,c) é um vetor normal ao plano α.

Exemplo: Sejam
a reta r: X=(1,2,1)+λ(1,1,1); λ Є R
e o pano α: x+y-2z-1=0.

u=(1,1,1)
$\mathbf{W}_\alpha$=(1,1,-2)

$\mathbf{u} \, . \, \mathbf{W}_\alpha = 0$ substituindo-se A=(1,2,1) na equação do plano verifica-se que o mesmo satisfaz a equação do plano e portanto a reta r pertence ao plano α.

II. A reta é paralela ao plano



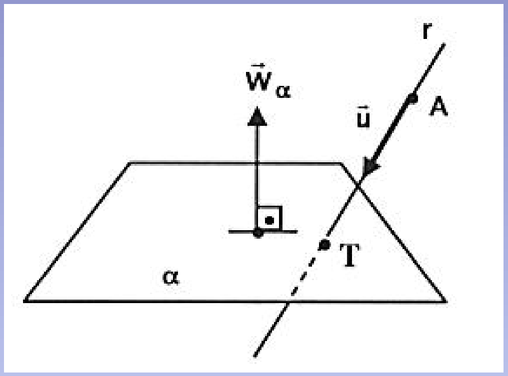
r//αY**u.W**$_\alpha$=0 e A $\notin \alpha$, onde **W**$_\alpha$=(a,b,c) é um vetor normal ao plano α.

Exemplo: Sejam
a reta r: X=(1,2,1)+λ(1,1,1); λ Є R
e o pano α: x+y-2z+3=0.

u=(1,1,1)
W$_\alpha$=(1,1,-2)

u . **W**$_\alpha = 0$ substituindo-se A=(1,2,1) na equação do plano verifica-se que o mesmo não satisfaz a equação do plano e portanto a reta r pertence ao plano α, sendo paralela ao mesmo.

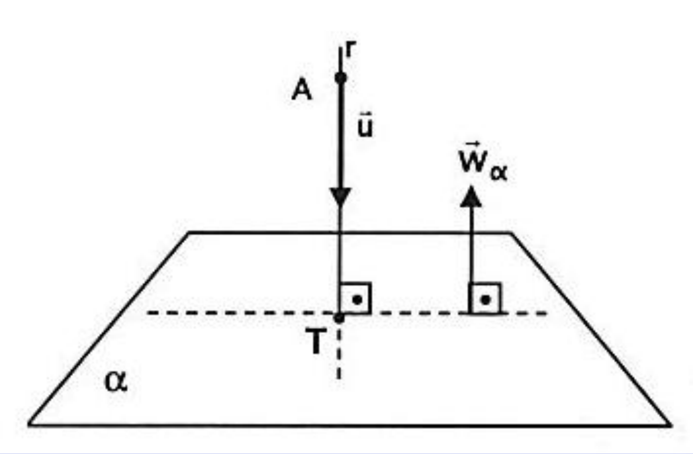
III. Reta e plano concorrentes e não perpendiculares



Neste caso **u** e $\mathbf{W}_\alpha$ não são ortogonais.
Portanto $\mathbf{u}.\mathbf{W}_\alpha \neq 0$.
Se a reta fosse perpendicular ao plano, então o conjunto de vetores {**u**,$\mathbf{W}_a$} seria linearmente dependente, e existiria m Є R tal que **u**=m $\mathbf{W}_\alpha$.
Se a reta não é perpendicular ao plano então {**u**,$\mathbf{W}_a$} é linearmente independente. E há a intersecção entre a reta e o plano em um único ponto T.

Exemplo: Sejam
a reta r: X=(1,-1,3)+λ(1,1,1); λ Є R
e o pano α: x+2y+z-1=0.
u . $\mathbf{W}_\alpha = 4$ a reta não é paralela ao plano
{**u**,$\mathbf{W}_a$} é linearmente independente , logo a reta não é perpendicular ao plano.
Portanto reta e plano são concorrentes e não perpendiculares. Existe um único ponto de intersecção T.

IV. Reta é perpendicular ao Plano



Se a reta é perpendicular ao plano (**u**//**W**α) então {**u,W**$_a$} é linearmente dependente. Existe um m Є R tal que **u**=m **W**$_\alpha$. Neste caso **u.W**$_\alpha$≠0. O ponto T é a intersecção entre reta e plano.

Exemplo: Sejam
a reta r: X=(2,1,3)+λ(2,4,-2); λ Є R
e o pano α: x+2y-z=0.
W$_\alpha$ = (1,2,-1). **W**$_\alpha$ =1/2**u.** Portanto {**u,W**$_a$} são linearmente dependentes.
Consequentemente a reta r é paralela ao plano α.

Este é o final! ☺